

Ον/μο.....

ΑΜ.....

1. (2M) Ένα σωματίδιο κινείται στο χώρο με διάνυσμα θέσης: $\mathbf{r} = 6\mathbf{i} + (3 + 4t)\mathbf{j} - (3 + 2t - t^2)\mathbf{k}$.

Οι αποστάσεις είναι σε μέτρα και ο χρόνος σε δευτερόλεπτα.

(α) Ποια είναι το διάνυσμα της ταχύτητας και ποιο το μέτρο της όταν $t = 0s$ και $t = +3s$; (0.5M)

(β) Ποια είναι το διάνυσμα της επιτάχυνσης και ποιο το μέτρο της όταν $t = 0s$ και $t = +3s$; (0.5M)

(γ) Ποια είναι η απόσταση του κινητού μετά $3s$ από την αρχή των αξόνων και ποια από το σημείο εκκίνησης του ($t = 0s$). (0.5M)

(δ) Σχεδιάστε σε ένα πρόχειρο διάγραμμα τη μεταβολή της z συνιστώσας της θέσης για $0s < t < 4s$. (0.5M)

(α) Έχουμε $\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - (2 - 2t)\mathbf{k}$ και $|\mathbf{v}(t)| = \left(\sqrt{0^2 + 4^2 + 2^2(1-t)^2} \right) m/s = \left(2\sqrt{4 + (1-t)^2} \right) m/s$

Για $t = 0 \rightarrow \mathbf{v}(0) = 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ και $|\mathbf{v}(0)| = 2\sqrt{5} m/s$

Για $t = 3s \rightarrow \mathbf{v}(3) = 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ και $|\mathbf{v}(3)| = 2\sqrt{8} m/s$

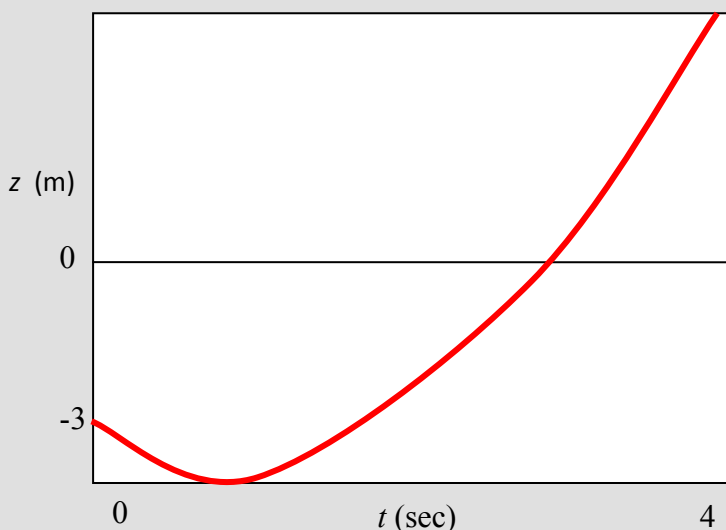
(β) Έχουμε $\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 2\mathbf{k} = 2\mathbf{k}$ και $|\mathbf{a}(t)| = \left(\sqrt{0^2 + 0^2 + 2^2} \right) m/s^2 = 2 m/s^2$ που είναι ανεξάρτητα του χρόνου

(γ) Η απόσταση του κινητού από την αρχή των αξόνων είναι $|\mathbf{r}(t = 3s)| = \sqrt{6^2 + 15^2 + 0^2} m = \sqrt{261} m$. Η απόστασή από το σημείο εκκίνησης είναι:

$|\mathbf{r}(t = 3s) - \mathbf{r}(t = 0s)| = |(6\mathbf{i} + 15\mathbf{j} - 0\mathbf{k}) - (6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k})| = \sqrt{0^2 + 12^2 + 3^2} m = \sqrt{153} m$

(δ) Έχουμε $z(t) = -(3 + 2t - t^2)$

t (sec)	z (m)
0	-3
1	-4
2	-3
3	0
4	5



2. (1.5M) Σε ένα σώμα που υφίσταται μετατόπιση $\mathbf{s} = 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, εκτός άλλων δυνάμεων, δρα και η δύναμη $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$. Οι αποστάσεις είναι σε cm και η δύναμη σε N . Να υπολογίσετε:

α) το έργο (σε *Joule*) που παράγει η δύναμη στο σωματίο και (0.75M)

β) τη γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\mathbf{F}$ και $\mathbf{s}$. (0.75M)

α) $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = -24 cm N = -0.24 m N = -0.24 Joule$

β) $\mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = |\mathbf{F}| |\mathbf{s}| \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{s}}{|\mathbf{F}| |\mathbf{s}|} = \frac{-24 cm N}{(\sqrt{20} N)(\sqrt{45} cm)} = -0.8$ οπότε $\theta = \cos^{-1}(-0.8) \approx 143.13^\circ$.

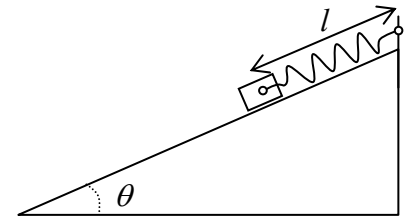
Ον/μο.....

ΑΜ.....

3. (1.5M) Σώμα μάζας M είναι συνδεδεμένο σε ιδανικό ελατήριο σταθεράς k_{el} με φυσικό μήκος l_0 και βρίσκεται σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ .

α) Αν αγνοήσουμε το συντελεστή τριβής μεταξύ του σώματος και του επιπέδου να υπολογίσετε το μήκος, l , του ελατηρίου στην ισορροπία. (0.5M)

β) Αν ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ σώματος και επιπέδου είναι 0.1 υπολογίστε πόσο μπορούμε να επιμηκύνουμε το ελατήριο και το σώμα να παραμένει ακίνητο στο επίπεδο. (1M)



α) Στο διπλανό σχήμα σχεδιάζονται οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα. Στην ισορροπία, απουσία δυνάμεων τριβής ($F_{tp} = 0$) έχουμε:

$$k_{el}(l - l_0) = Mg \sin \theta \Rightarrow l = l_0 + \frac{Mg}{k_{el}} \sin \theta$$

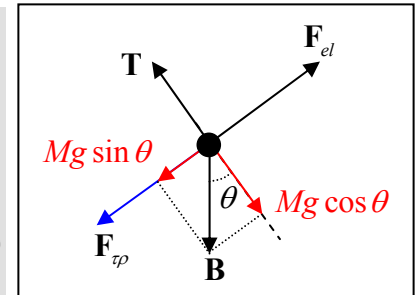
β) Έστω ότι επιμηκύνουμε το ελατήριο ώστε να έχει μήκος l_1 . Προκειμένου το σώμα να παραμένει ακίνητο θα πρέπει

$$k_{el}(l_1 - l_0) \leq Mg \sin \theta + \eta T \Rightarrow l_1 \leq l_0 + \frac{Mg \sin \theta + \eta T}{k_{el}}$$

Έχουμε όμως ότι $T = Mg \cos \theta$ οπότε

$$l_1 \leq l_0 + \frac{Mg \sin \theta + \eta Mg \cos \theta}{k_{el}} \Rightarrow l_1 \leq l_0 + \frac{Mg}{k_{el}} (\sin \theta + \eta \cos \theta)$$

Η ισότητα στην προηγούμενη ανισότητα μας δίνει τη μέγιστη επιμήκυνση του ελατηρίου. Επιμήκυνση πέρα από αυτό το μήκος θα προκαλέσει κίνηση του σώματος καθώς η έλξη του ελατηρίου θα υπερβεί τη συνιστώσα του βάρους και τη στατική τριβή.



4. (1M) Το μόριο του Οξυγόνου (O_2) ($m_o = 1.66 \times 10^{-23} \text{ gr}$) περιστρέφεται στο επίπεδο xy γύρω από τον άξονα z , που είναι κάθετος στο επίπεδο xy και διέρχεται από το μέσο της γραμμής που ενώνει τα δύο άτομα. Η απόσταση μεταξύ των δύο ατόμων είναι $1,21 \times 10^{-10} \text{ m}$ (θεωρούμε ότι τα άτομα είναι σημεία στο χώρο).

Να υπολογίσετε:

α) τη ροπή αδρανείας του μορίου ως προς τον άξονα z και **β)** την κινητική ενέργεια περιστροφής, αν γνωρίζετε ότι η γωνιακή ταχύτητα του μορίου γύρω από τον άξονα z είναι $2,0 \times 10^{12} \text{ rad/s}$

α) Από τον ορισμό της ροπής αδρανείας έχουμε,

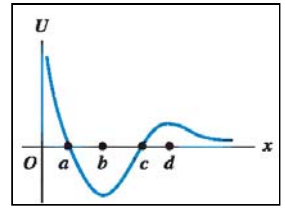
$$I = \sum_{i=1}^2 m_i r_i^2 = \left(m_o \left(\frac{1.21 \times 10^{-10} \text{ m}}{2} \right)^2 + m_o \left(\frac{1.21 \times 10^{-10} \text{ m}}{2} \right)^2 \right) \\ = 2 \times 1.66 \times 10^{-26} \times 3.66 \times 10^{-21} \text{ Kgr} \times \text{m}^2 \approx 1.2 \times 10^{-46} \text{ Kgr} \times \text{m}^2$$

$$\text{β)} K = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} 1.2 \times 10^{-46} (2 \times 10^{12})^2 \text{ J} \approx 2.4 \times 10^{-22} \text{ J}$$

Ον/μο.....

ΑΜ=====

5. (1M) Στο διπλανό σχήμα απεικονίζεται η δυναμική ενέργεια $U(x)$ ενός σωματιδίου που κινείται κατά μήκος του x -άξονα. Σε ποια από τα σημεία που επισημαίνονται στον άξονα x η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι α) μηδενική, β) προς τη θετική διεύθυνση, και γ) προς την αρνητική διεύθυνση. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.



Γνωρίζουμε ότι $F_x = -\frac{dU}{dx}$. Συνεπώς α) η δύναμη είναι μηδενική εκεί που η

συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας παρουσιάζει ακρότατα. Δηλ. στα σημεία b και d του διαγράμματος.

β) η παράγωγος (κλίση) της δυναμικής ενέργειας είναι αρνητική για $0 < x < b$ και για $x > d$ και θετική όταν $b < x < d$. Συνεπώς από τη σχέση $F_x = -dU/dx$ προκύπτει ότι $F_x < 0$ όταν $b < x < d$ δηλαδή η συνισταμένη δύναμη είναι στη διεύθυνση της αρχής των αξόνων και $F_x > 0$ όταν $0 < x < b$ ή $x > d$

6. (1.5M) Το διάνυσμα θέσης ενός σώματος μάζας 2 kg σε συνάρτηση με το χρόνο είναι $\mathbf{r} = (2t^2 \mathbf{i} + 5t \mathbf{j})$. Προσδιορίστε τη στροφορμή $\mathbf{L}$ (μέτρο και διεύθυνση) του σώματος ως συνάρτηση του χρόνου.

Γνωρίζουμε ότι η στροφορμή ορίζεται ως το εξωτερικό γινόμενο: $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. Η ορμή του σωματιδίου

είναι $\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 2(4t\mathbf{i} + 5\mathbf{j}) \text{ kg m s}^{-1}$. Έχουμε

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2t^2 & 5t & 0 \\ 8t & 5 & 0 \end{vmatrix} = -((10t^2 - 40t^2)\mathbf{k}) \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1} = (30t^2\mathbf{k}) \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}. \text{ Για τη συγκεκριμένη}$$

κίνηση η στροφορμή έχει μεταβλητό μέτρο με το χρόνο και σταθερή διεύθυνση κατά τα θετικά του άξονα z .

7. (2.0M) Το διάνυσμα θέσης ενός σώματος μάζας $m_1 = 200 \text{ kg}$ είναι $\mathbf{r}_1 = (-2\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}) \text{ m}$ και ενός άλλου μάζας $m_2 = 50 \text{ kg}$ είναι $\mathbf{r}_2 = ((t^2 - 3t)\mathbf{i} + (2t - 1)\mathbf{j}) \text{ m}$. Και τα δύο σώματα ξεκινούν την κίνησή τους τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$. Υπολογίστε μετά από πόσο χρόνο θα συγκρουστούν. Μετά από τη σύγκρουση τα δύο οχήματα συσσωματώνονται και κινούνται μαζί. Υπολογίστε την κοινή τους ταχύτητα.

Τα σώματα συγκρούονται όταν οι θέσεις τους ταυτίζονται, δηλ. πρέπει να ισχύει:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 \Rightarrow \begin{cases} t^2 - 3t = -2 \\ 2t - 1 = t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ s ή } t = 2 \text{ s} \\ t = 1 \text{ s} \end{cases} \Rightarrow t = 1 \text{ s}$$

Η χρονική εξέλιξη των ταχυτήτων των σωματιδίων όπως υπολογίζονται από τη σχέση $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ είναι: $\mathbf{v}_1 = (-0\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}) \text{ m/s}$ και $\mathbf{v}_2 = ((2t - 3)\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \text{ m/s}$

Από την αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα των δύο σωματιδίων έχουμε $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_f$.

Εφαρμόζοντας για $t = 1 \text{ s}$ παίρνουμε

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = (m_1 + m_2)\mathbf{v}_f \Rightarrow \mathbf{v}_f = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{v}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{v}_2$$

$$\Rightarrow \mathbf{v}_f = \frac{200}{250}(-0\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \text{ m/s} + \frac{50}{250}((2 - 3)\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \text{ m/s} = \left(-\frac{50}{250}\mathbf{i} + \frac{500}{250}\mathbf{j}\right) \text{ m/s} = \left(-\frac{1}{5}\mathbf{i} + 2\mathbf{j}\right) \text{ m/s}$$